$$\exp(A) = \exp(A_S)\exp(A_N)$$
$$= \exp(A_N)\exp(A_S)$$

LEHRBUCH

Stefan Waldmann

Lineare Algebra 2

Anwendungen und Konzepte für Studierende der Mathematik und Physik

Springer Spektrum

Lineare Algebra II

Stefan Waldmann

Lineare Algebra II

Anwendungen und Konzepte für Studierende der Mathematik und Physik

Springer Spektrum

Stefan Waldmann
Institut für Mathematik
Universität Würzburg
Würzburg, Deutschland

ISBN: 978-3-662-53347-5 ISBN: 978-3-662-53348-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-53348-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Dr. Lisa Edelhäuser

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Für meine Lieben:
Robert, Sonja, Richard, Silvia und Viola

Vorwort

Die kanonischen Themen der lineare Algebra umfassen typischerweise eine kurze Einführung in die Theorie der Gruppen, Ringe und Körper, eine ausführlichere Diskussion von Vektorräumen und linearen Abbildungen, Determinanten und Matrizen, sowie Normalformen, Eigenwerttheorie und eine erste Einführung in die Theorie der euklidischen und unitären Vektorräume. Diese Themen sind wohl in allen gängigen Lehrbüchern zur linearen Algebra wie etwa [5, 7, 20–24, 26, 35] zu finden und können gut in (vielleicht etwas mehr als) einem Semester bewältigt werden. Es bleibt aber meistens dem Dozenten überlassen, die restliche Zeit des typischerweise zweisemestrigen Kurses zur linearen Algebra zu füllen. Einige Lehrbücher bieten hier weiterführende Themen an, andere bieten lediglich das Material für den Grundstock und lassen der Dozentin die Wahl.

Die möglichen Themen sind dabei sehr vielfältig: Man kann versuchen, die theoretischen Aspekte der linearen Algebra weiter zu vertiefen und beispielsweise die Theorie der Moduln über Ringen vorbereiten als erste Verallgemeinerung der Vektorräume über Körpern. Andererseits kann man auch stärker in Richtung von Anwendungen, beispielsweise in der Numerik, gehen und hier erste numerische Verfahren diskutieren, mit denen Problemstellungen der linearen Algebra wie etwa das Finden der Normalformen angegangen werden können. Dazwischen sind selbstverständlich unzählige andere Optionen möglich. Zudem existieren an vielen Universitäten neben dem klassischen Bachelor in Mathematik sowie den Lehramtsstudiengängen auch weitere, spezialisierte Bachelor-Studiengänge wie Wirtschaftsmathematik oder mathematische Physik. Hier gilt es also auch abzuwägen, welches Klientel in der zweiten Hälfte einer linearen Algebra mit welchen Themen angesprochen werden soll.

Aufbauend auf dem ersten Band zur linearen Algebra [34] liefert der vorliegende zweite Band hier nun einen Vorschlag, wie die restliche Zeit einer zweisemestrigen Vorlesung genutzt werden kann:

Zum einen sollen wichtige Anwendungen aufzeigen, wie Techniken der linearen Algebra genutzt werden können, um mathematische Probleme jenseits ihres eigentlichen Wirkungskreises zu lösen. Hier fiel die Wahl auf die Lösungstheorie von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, welche durch geeignete Matrix-Exponentiation leicht gelöst werden können. Die

Bedeutung dieser Anwendung ist kaum zu überschätzen. Innerhalb der Mathematik handelt es sich um die erste wichtige Klasse von Differentialgleichungen, für die eine einfache und geschlossene Lösungstheorie vorhanden ist. Die Diskussion der Exponentialfunktion für Matrizen ist weiter ein erster Ausblick auf die Theorie der Matrix-Lie-Gruppen und ihrer Lie-Algebren. Aber auch außerhalb der Mathematik sind die Anwendungen vielfältig. Hier werden vor allem die Anwendungen in der mathematischen Physik der harmonischen Schwingungen in der Vordergrund gestellt.

Zum anderen sollen die abstrakteren Techniken der linearen Algebra verfeinert werden: Als erstes Thema in diesem Kontext werden verschiedene Quotientenkonstruktionen betrachtet. Oftmals werden Quotientenvektorräume lediglich kurz definiert und schnell abgehandelt. Im Kontrast dazu sollen sie hier nun in einem eigenen Kapitel als eine von vielen Quotientenkonstruktionen auftreten, welches die universelle Bedeutung von Äquivalenzklassen und Quotienten herausstellen soll. Diese Sichtweise ist in fast allen Bereichen der Mathematik von großem Belang und bereitet Studierenden nur allzu oft Schwierigkeiten, wenn es etwa zu Fragen nach Wohldefiniertheit kommt. Durch die intensive Beschäftigung mit Quotienten von verschiedener Natur soll hier eine solide Grundlage geschaffen werden, die es erlaubt, auch in weiterführenden Vorlesungen dieses wichtige Thema unbeschwert angehen zu können.

Das Herzstück dieses zweiten Bandes zur linearen Algebra ist das Kapitel zu multilinearen Abbildungen und Tensorprodukten. Die Wahl fiel hierbei recht leicht, da dieses Thema in den meisten Lehrbüchern zur linearen Algebra nur sehr kurz oder überhaupt nicht zur Sprache kommt. Lediglich in weiterführenden Büchern wie etwa [14] findet man eine angemessene Darstellung dieses in so vielen Bereichen der Mathematik wichtigen Themas. Die Bedeutung der multilinearen Algebra und des Tensorprodukts lässt sich im Hinblick auf weiterführende Vorlesungen kaum überschätzen: In der homologischen Algebra, der algebraischen Topologie, der Differentialgeometrie, der Algebra, aber eben auch in angewandteren Themen der Funktionalanalysis und nicht zuletzt in der Quanteninformationstheorie werden Tensorprodukte als zentrale Technik benötigt. Daher werden die Tensorprodukte, ihre universellen Eigenschaften, sowie resultierende Konstruktionen detailliert besprochen. Im Hinblick auf Anwendungen in der Physik (aber auch in der Differentialgeometrie) darf eine Diskussion des Indexkalküls nicht fehlen. Auch wenn dies sicherlich nicht die beste Art darstellt, mit Tensoren zu arbeiten, muss man diese Herangehensweise doch gesehen haben, um viele der zum Teil auch älteren Arbeiten später lesen zu können. Das Kapitel endet dann mit einer Diskussion der Tensoralgebra sowie der symmetrischen Algebra und der Grassmann-Algebra.

Als letztes großes Thema werden nun Bilinearformen erneut diskutiert. Im ersten Band wurden hier bereits einige Grundlagen gelegt, um dann schnell zu den positiv definiten Bilinearformen, also den Skalarprodukten auf reellen Vektorräumen, zu kommen. Nun werden Bilinearformen über beliebigen Körpern betrachtet und verschiedene Normalformen diskutiert, was im symmetrischen und reellen Fall zum Begriff der Signatur führt, im antisymmetrischen Fall zum linearen Darboux-Theorem. Der antisymmetrischen Fall wurde hier bewusst sehr ausführlich dargestellt, um einige Grundlagen für weiterführende Vorlesungen etwa zur symplektischen Geometrie zu bieten. Abschließend werden erste Ergebnisse zu quadratischen Funktionen und Quadriken vorgestellt. Dies ist jedoch nur als ein Ausblick zu sehen, da eine weiterführende Diskussion entweder in der Differentialgeometrie oder der algebraischen Geometrie erfolgt, je nach dem, ob metrische Aspekte berücksichtigt werden sollen oder nicht.

Jedes Kapitel enthält eine Vielzahl von Übungsaufgaben (insgesamt über 100), welche den Studierenden ermöglichen sollen, die erlernten Techniken zu benutzen und zu vertiefen: Wie immer so gilt es auch hier, dass man Mathematik nicht durch Zuschauen lernen kann. Nur wer selbst Hand anlegt, kann am Ende einen Erfolg erzielen. Wie auch schon in Bd. 1 gibt es zahlreiche Hinweise zu den Übungen, die explizite Lösungen überflüssig machen sollten. Weiter gibt es wieder Übungen zum Erstellen von Übungen, in denen diskutiert wird, wie man geschickte Zahlenbeispiele konstruiert. Abschließend gibt es immer eine Übung zum Beweisen oder Widerlegen, wo schnelle und einfache Argumente und Gegenbeispiele gefunden werden sollen.

Etwaige Unklarheiten sowohl zum Haupttext als auch zu den Übungen werde ich auf meiner Homepage

https://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~waldmann/

kontinuierlich klarstellen. Kommentare hierzu sind selbstverständlich sehr willkommen.

Wie schon beim ersten Band haben auch bei diesem Buch viele Kolleginnen und Kollegen auf verschiedene Weise zum Gelingen beigetragen. Zunächst möchte ich Josias Reppekus danken, der bei den ersten Versionen des Manuskripts beim Schreiben der LaTeX-Dateien tatkräftig geholfen hat. Weiter gilt mein Dank Bas Janssen und Christoph Zellner in Erlangen für die Hilfe beim Erstellen der Übungen zur Vorlesung, die ich im Sommersemester 2013 so das erste Mal gehalten habe. Viele der Übungsaufgaben haben ihren Weg in dieses Buch gefunden. Meinen Kollegen Peter Fiebig und Karl-Hermann Neeb in Erlangen gebührt ebenfalls großer Dank für die vielen Diskussionen und Ideen zum Halten einer Vorlesung über lineare Algebra. Beim zweiten Durchgang im Sommersemester 2016, nun in Würzburg, halfen mir vor allem Chiara Esposito, Thorsten Reichert, Jonas Schnitzer, Matthias Schötz und Thomas Weber mit vielen neuen Übungen sowie mit weitreichenden Vorschlägen und Kommentaren zum Manuskript. Dem Team des Springer-Verlags sei an dieser Stelle ebenfalls für die Betreuung des ganzen zweibändigen Projekts herzlich gedankt.

Der meiste Dank gilt natürlich meiner Familie: Ohne die Unterstützung meiner Kinder wie auch meiner Frau Viola wäre dieses Projekt unmöglich gewesen.

Würzburg, Deutschland Stefan Waldmann
Juli 2016

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen und natürliche Zahlen mit Null
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	Körper der rationalen, reellen und komplexen Zahlen
$(G, \cdot, 1)$	Multiplikativ geschriebene Gruppe
$(G, +, 0)$	Additiv geschriebene (abelsche) Gruppe
$\boldsymbol{n}$	Menge der ersten n natürlichen Zahlen
$S_n = \mathsf{Bij}(\boldsymbol{n})$	Permutationsgruppe (symmetrische Gruppe)
$\mathbb{Z}_p$	Zyklische Gruppe der Ordnung p
$\mathsf{0}$, $\mathsf{1}$	Additiv bzw. multiplikativ geschriebene triviale Gruppe
$\vec{a} \times \vec{b}$	Kreuzprodukt für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
$\ker \phi$, $\operatorname{im} \phi$	Kern und Bild von ϕ
$\mathsf{R}[x]$	Polynomring mit Koeffizienten in Ring R
$\deg(p)$	Grad eines Polynoms p
$\operatorname{char}(\Bbbk)$	Charakteristik eines Körpers $\Bbbk$
δ_{ab}	Kronecker-Symbol
$\mathsf{Abb}_0(M, \Bbbk)$	Abbildungen mit endlichem Träger
$v = \sum_{b \in B} v_b b$	Basisdarstellung von Vektor $v \in V$
$\dim V$	Dimension des Vektorraums V
$\prod_{i \in I} V_i$	Kartesisches Produkt von Vektorräumen
$\bigoplus_{i \in I} V_i$	Direkte Summe von Vektorräumen
$\Bbbk^B$	Kartesisches Produkt von B Kopien von $\Bbbk$
$\Bbbk^{(B)}$	Direkte Summe von B Kopien von $\Bbbk$
$\mathsf{Hom}(V, W)$	Lineare Abbildungen (Homomorphismen) von V nach W
$\operatorname{rank} \Phi$	Rang der linearen Abbildung Φ
${}_B[v] \in \Bbbk^{(B)}$	Koordinaten von v bezüglich einer Basis B

${}_B[\Phi]_A$	Matrix der linearen Abbildung Φ bezüglich der Basen A und B
$\Bbbk^{(B)\times A}$	$B \times A$-Matrizen mit Endlichkeitsbedingung
$\mathrm{M}_{n\times m}(\Bbbk)$, $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$	$n \times m$-Matrizen, $n \times n$-Matrizen über $\Bbbk$
$\mathrm{GL}_n(\Bbbk) = \mathrm{M}_n(\Bbbk)^\times$	Allgemeine lineare Gruppe
E_{ij}	(i, j)-Elementarmatrix
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$	Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
A^{T}	Transponierte Matrix zu A
$V^* = \mathsf{Hom}(V, \Bbbk)$	Dualraum von V
$b^* \in V^*$	Koordinatenfunktional zum Basisvektor $b \in B \subseteq V$.
Φ^*	Duale (transponierte) Abbildung zu Φ
$\iota\colon V \longrightarrow V^{**}$	Kanonische Einbettung in den Doppeldualraum
$[A, B] = AB - BA$	Kommutator von A und B
$\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$	Spezielle lineare Gruppe
$\chi_A(x) = \det(A - x\mathbb{1})$	Charakteristisches Polynom von A
$\mathsf{tr}(A)$	Spur von A
$A = A_{\mathrm{S}} + A_{\mathrm{N}}$	Jordan-Zerlegung in halbeinfachen und nilpotenten Teil
$A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$	Spektraldarstellung von A
$\mathrm{spec}(A)$	Spektrum von A
$\mathbb{K}$	Alternativ $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Inneres Produkt, Skalarprodukt
$^\flat\colon V \longrightarrow V^*$	Musikalischer Homomorphismus bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$\mathsf{Bil}(V)$	Bilinearformen auf V
$[\langle \cdot, \cdot \rangle]_{B,B}$	Matrix der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich einer Basis B
$\\|\cdot\\|$	Norm
$U^\perp$	Orthogonalkomplement der Teilmenge $U \subseteq V$
$v = v_\parallel + v_\perp$	Orthogonale Zerlegung von v
P_U	Orthogonalprojektor auf U
$\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$	Orthogonale und unitäre Gruppe
$\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$	Spezielle orthogonale und spezielle unitäre Gruppe
A^*	Adjungierte Abbildung von A
$\sharp$	Inverses des musikalischen Isomorphismus $^\flat$
$\sqrt{A}$	Positive Wurzel von positivem A
$\vert A\vert$, A_+, A_-	Absolutbetrag, Positivteil und Negativteil von A
$\\|A\\|$, $\\|A\\|_2$	Operatornorm und Hilbert-Schmidt-Norm von A

$\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $x^{(k)}(t)$	Erste, zweite und k-te Ableitung von x nach t
$\exp\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$	Exponentialabbildung für Matrizen
$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{K})$	Selbstadjungierte $n \times n$-Matrizen
$\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{K})$	Positiv definite $n \times n$-Matrizen
$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$	Spurfreie $n \times n$-Matrizen
$\mathfrak{so}(n)$	Reelle schiefsymmetrische $n \times n$-Matrizen
$\mathfrak{u}(n)$	Anti-Hermitesche $n \times n$-Matrizen
$\mathfrak{su}(n)$	Spurfreie anti-Hermitesche $n \times n$-Matrizen
$R(\alpha, \vec{n})$	Drehmatrix um Achse $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ um Winkel α
$\sim$	Äquivalenzrelation
$[x] = \mathrm{pr}(x)$	Äquivalenzklasse von x
$\mathrm{pr}\colon M \longrightarrow M \big/ \sim$	Quotientenabbildung
$\sim_F$	Kernrelation von Abbildung F
$G \big/ H$	Quotientengruppe
$p\mathbb{Z}$	Ganzzahlige Vielfache von p
$\mathsf{R} \big/ \mathsf{J}$	Quotientenring (Faktorring)
$V \big/ U$	Quotientenvektorraum
$\operatorname{codim} U$	Kodimension eines Unterraums U
U^{ann}	Annihilator eines Unterraums U
$\mathsf{Hom}_{\mathsf{f}}(V, W)$	Homomorphismen mit endlich-dimensionalem Bild
$\mathsf{End}_{\mathsf{f}}(V)$	Endomorphismen mit endlich-dimensionalem Bild
$\operatorname{coker} \phi$	Kokern einer linearen Abbildung
$\mathsf{Hom}(V_1, \ldots, V_k; W)$	Multilineare Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow W$
$\Psi \circ_k \Phi$	Verkettung an k-ter Stelle
$\mathrm{i}_\ell(v)\Phi$	Einsetzung an ℓ-ter Stelle
${}_B[\Phi]_{A_1,\ldots,A_k}$	Basisdarstellung von multilinearer Abbildung
$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$	Tensorprodukt von Vektorräumen
$\otimes$	Tensorprodukt von Vektoren, Abbildungen
$\tau\colon V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$	Kanonische Flip-Abbildung
$\Theta\colon W \otimes V^* \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{f}}(V, W)$	Kanonischer Isomorphismus
$\mathrm{ev}\colon V \otimes V^* \longrightarrow \Bbbk$	Kanonische Evaluation (Spur)
$\mathrm{T}^k(V) = V^{\otimes k}$	Kontravariante Tensorpotenzen von V
$\mathrm{T}_\ell(V) = \mathrm{T}^\ell(V^*)$	Kovariante Tensorpotenzen von V
$\mathrm{T}^k_\ell(V)$	Gemischte Tensoren vom Typ $\binom{k}{\ell}$
$\sigma \triangleright$	Permutationswirkung auf $V^{\otimes k}$
$\mathscr{S}_k$, $\mathscr{A}_k$	Symmetrisator und Antisymmetrisator auf $V^{\otimes k}$
$\mathrm{S}^k(V) \subseteq \mathrm{T}^k(V)$	Symmetrische Tensoren
$\Lambda^k(V) \subseteq \mathrm{T}^k(V)$	Antisymmetrische Tensoren
$\mathscr{A}$	Assoziative Algebra

$\mathscr{A}/\mathscr{J}$	Quotientenalgebra
$\mathrm{T}^\bullet(V)$	Tensoralgebra über V
$\vee$, $\wedge$	Symmetrisches und antisymmetrisches Tensorprodukt
$\mathrm{S}^\bullet(V)$	Symmetrische Algebra über V
$\Lambda^\bullet(V)$	Grassmann-Algebra über V
ϕ^*, ϕ_*	Pull-back und push-forward
deg, $\deg_{\mathrm{s}}$, $\deg_{\mathrm{a}}$	Gradabbildungen von $\mathrm{T}^\bullet(V)$, $\mathrm{S}^\bullet(V)$ und $\Lambda^\bullet(V)$
$\ker h$, $\operatorname{rank} h$	Kern und Rang einer Bilinearform h
$\mathsf{Bil}_\pm(V)$	Symmetrische und antisymmetrische Bilinearformen
$\eta_{r,s}$	Kanonisches inneres Produkt mit Signatur (r, s)
$\mathrm{O}(r, s; \mathbb{R})$	Pseudoorthogonale Gruppe
$\mathrm{L}(1, n) = \mathrm{O}(1, n; \mathbb{R})$	Lorentz-Gruppe
$\mathrm{U}(r, s)$	Pseudounitäre Gruppe
$\mathrm{SU}(r, s)$	Spezielle pseudounitäre Gruppe
(V, ω)	Symplektischer Vektorraum
$\mathrm{Sp}(V, \omega)$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{k})$	Symplektische Gruppe
Ω_{can}	Kanonische symplektische Matrix
$(V_{\mathrm{red}}, \omega_{\mathrm{red}})$	Reduzierter symplektischer Vektorraum
T_v	Translation um $v \in V$
$Q(f, \lambda) = f^{-1}(\{\lambda\})$	Quadrik zur quadratischen Funktion f zu $\lambda \in \mathbb{k}$

Inhaltsverzeichnis

Lineare Differentialgleichungen und die Exponentialabbildung

1

In diesem kleinen Kapitel wollen wir eine erste Klasse von Anwendungen diskutieren, die in vielen Bereichen der Mathematik sowie in den Naturwissenschaften von zentraler Bedeutung ist: die Lösungstheorie linearer Differentialgleichungen. Selbstverständlich ist dies ein viel zu weites Feld, als dass man es in kurzer Zeit und mit geringem Aufwand angemessen vorstellen könnte. Unsere Darstellung bleibt daher notwendigerweise unvollständig und oberflächlich, zur Vertiefung sei auf die weiterführende Literatur wie beispielsweise [15–17] verwiesen. Es soll hier vielmehr dargelegt werden, wie diejenigen Techniken der linearen Algebra, die wir bisher entwickelt haben, eingesetzt werden können, um in anderen Bereichen der Mathematik weitreichende Aussagen treffen zu können. Als neues und wesentliches Hilfsmittel werden wir hierfür die Exponentialfunktion auf Matrizen ausdehnen und einige ihrer Eigenschaften studieren.

1.1 Lineare Differentialgleichungen

In vielen Bereichen der Naturwissenschaften und vornehmlich in der Physik werden vielfältige Fragestellungen durch *gewöhnliche Differentialgleichungen* modelliert. Hier ist eine eventuell vektorwertige Funktion f einer Variablen t gesucht, die eine Gleichung der Form

$$F\Big(f^{(n)}(t), f^{(n-1)}(t), \ldots, \dot{f}(t), f(t), t\Big) = 0 \tag{1.1}$$

erfüllen soll, wobei $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f bezeichnet und F eine eventuell vektorwertige Funktion von $n + 2$ Argumenten ist. Dies ist noch eine recht allgemeine und unspezifische Form, welche wir im Folgenden mathematisch präzisieren müssen. *Gewöhnlich* soll in diesem Zusammenhang bedeuten, dass wir nur eine Variable t haben, nach der differenziert wird. *Partielle* Differentialgleichungen sind

S. Waldmann, *Lineare Algebra 2*,
DOI 10.1007/978-3-662-53348-2_1

dann solche, in denen Ableitungen nach mehreren Variablen auftreten. Erwartungsgemäß ist ihr Studium erheblich komplizierter.

Wir beginnen zur Orientierung mit einigen Beispielen:

Beispiel 1.1 (Freie Bewegung und die Newtonsche Bewegungsgleichung). Wir betrachten ein Teilchen der Masse $m > 0$, welches sich im Raum bewegen kann. Die Position des Teilchen zur Zeit t ist dann also ein Punkt $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, womit wir die *Bahnkurve* des Teilchens als Abbildung

$$\vec{x} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{1.2}$$

auffassen können. Die *Geschwindigkeit* des Teilchens zur Zeit t ist dann durch die Ableitung

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.3}$$

gegeben, während die *Beschleunigung* die zweite Ableitung

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.4}$$

ist. Unterliegt das Teilchen keinen äußeren Kräften, so lehrt die Newtonsche Mechanik, dass die Bewegung durch die Differentialgleichung

$$\ddot{\vec{x}}(t) = 0 \tag{1.5}$$

festgelegt wird. Liegen dagegen äußere Kräfte vor, und bezeichnen wir die Kraft zur Zeit t mit $\vec{F}(t)$, so gilt allgemeiner die *Newtonsche Bewegungsgleichung*

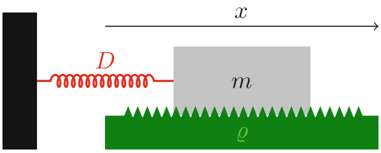
$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t). \tag{1.6}$$

Wir haben also in beiden Situationen eine Differentialgleichung vorliegen, für (1.6) müssen wir natürlich noch die genaue Form der Kraft $\vec{F}(t)$ spezifizieren, um eine tatsächliche physikalische Situation beschreiben zu können.

Beispiel 1.2 (Harmonischer Oszillator I). Eine speziellere Situation der Bewegung ist der harmonische Oszillator. Hier betrachtet man eine Kraft, die zum einen einen Anteil hat, der proportional zur Auslenkung, also zur Position $\vec{x}(t)$ des Teilchens ist. Zum anderen soll es einen Anteil geben, der proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ ist. Das Modell für diese Situation ist daher die Differentialgleichung

$$m\ddot{\vec{x}}(t) + \varrho\dot{\vec{x}}(t) + D\vec{x}(t) = 0, \tag{1.7}$$

Abb. 1.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Reibung



wobei $m > 0$ wieder die Masse des Teilchens und $\varrho, D \in \mathbb{R}$ Parameter des Modells sind. Die physikalische Interpretation des Terms $\varrho\dot{\vec{x}}$ ist die einer Reibungskraft, da sie eine Beschleunigung entgegen der aktuellen Geschwindigkeit hervorruft, sofern $\varrho \geq 0$. Die Bedeutung von $D > 0$ ist die einer Federkonstante, da dieser Term eine Kraft entgegen der Richtung der Auslenkung $\vec{x}$ bewirkt.

Alternativ können wir (1.7) auch nur für eine skalare Funktion $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wie etwa in Abb. 1.1 oder auch für einen n-komponentigen Vektor $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten. Auf diese Weise erhält man eine Spielart des n-dimensionalen harmonischen Oszillators.

Die Theorie der Differentialgleichungen von Typ (1.1) oder auch (1.6) ist im Allgemeinen noch sehr kompliziert, und ohne die Funktion F beziehungsweise die Kraft $\vec{F}$ zu spezifizieren, lässt sich nur wenig über die Lösungen von (1.1) oder (1.6) in Erfahrung bringen. Die freie Bewegung (1.5) oder etwas allgemeiner der harmonische Oszillator (1.7) erlauben dagegen eine viel übersichtlichere Theorie, da die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen *linear* auftreten. Diese Beobachtung führt zu folgender spezielleren Klasse von Differentialgleichungen:

Definition 1.3 (Lineare Differentialgleichung). Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung in n Dimensionen ist eine Differentialgleichung der Form

$$A_k(t)x^{(k)}(t) + A_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \cdots + A_1(t)\dot{x}(t) + A_0(t)x(t) = 0, \tag{1.8}$$

wobei $A_0, A_1, \ldots, A_k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vorgegebene matrixwertige Funktionen sind und $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die gesuchte vektorwertige Funktion ist. Sind die Funktionen $A_0, \ldots, A_k$ sogar konstant, so spricht man von einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Eine Lösung von (1.8) ist eine $\mathscr{C}^k$-Funktion

$$x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

für welche (1.8) für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung 1.4. Dass wir nach Lösungen suchen, die k-mal stetig differenzierbar sind, ist sicherlich durch das Problem (1.8) nahegelegt. Es sind aber auch andere (schwächere) Forderungen denkbar, wo etwa (1.8) nicht punktweise für alle $t \in \mathbb{R}$, sondern nur in einem geeigneten maßtheoretischen Sinne fast überall gelten sollte. Schließlich befasst sich die Distributionentheorie mit Lösungen gänzlich anderer Natur: Hier können bei geeigneter Interpretation der Ableitungen die Lösungen $\vec{x}$ sogar unstetig sein. Diese Spielarten sollen uns aber zunächst nicht weiter kümmern, vielmehr sei hierfür auf die weiterführende Literatur wie etwa [6, 9, 30] verwiesen. Weiter ist klar, dass eine Gleichung der Form (1.8) auch interessant ist, wenn die gültigen Zeiten t nur auf eine offene Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ eingeschränkt sind und entsprechend die gesuchte Lösung auch nur auf I definiert sein soll.

Ob es nun tatsächlich Lösungen zu (1.8) gibt und wie wir diese finden können, hängt sehr von der Wahl und Natur der Koeffizientenfunktionen $A_0, \ldots, A_k$ ab. Eine Aussage lässt sich aufgrund der *Linearität* jedoch bereits hier treffen:

Proposition 1.5. *Die Lösungen einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung k-ter Ordnung in n Dimensionen bilden einen Untervektorraum von $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Zunächst ist klar, dass die Nullabbildung

$$0\colon \mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; 0 \in \mathbb{R}^n$$

immer eine (sogar unendlich oft differenzierbare) Lösung von (1.8) ist, egal was für Koeffizientenfunktionen wir vorgeben. Sind nun $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ Lösungen von (1.8), so gilt für $z = \lambda x + \mu y$ zunächst

$$z^{(r)}(t) = \lambda x^{(r)}(t) + \mu y^{(r)}(t)$$

für alle $r = 0, \ldots, k$ nach den üblichen Regeln für die Ableitung. Dann rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned}
&A_k(t)z^{(k)}(t) + \cdots + A_1(t)\dot{z}(t) + A_0(t)z(t) \\
&\quad = \lambda A_k(t)x^{(k)}(t) + \cdots + \lambda A_1(t)\dot{x}(t) + \lambda A_0(t)x(t) \\
&\qquad + \mu A_k(t)y^{(k)}(t) + \cdots + \mu A_1(t)\dot{y}(t) + \mu A_0(t)y(t) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist also auch $z(t)$ eine Lösung von (1.8). □

Ist die Koeffizientenmatrix $A_k(t)$ ausgeartet, so wird die k-te Ableitung $x^{(k)}(t)$ durch (1.8) im Allgemeinen nicht durch die vorherigen Ableitungen bestimmt werden können. Es ist daher eine sinnvolle und in der Praxis auch oftmals erfüllte zusätzliche Annahme, dass $A_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine invertierbare Matrix sein soll. In diesem Fall ist x offenbar genau dann eine Lösung von (1.8), wenn

$$x^{(k)} + A_k^{-1}A_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + A_k^{-1}A_1\dot{x} + A_k^{-1}A_0 x = 0 \tag{1.10}$$

gilt. Wir können daher ohne Einschränkung annehmen, dass bereits $A_k(t) = \mathbb{1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt und somit eine lineare Differentialgleichung der Form

$$x^{(k)}(t) + A_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \cdots + A_1(t)\dot{x}(t) + A_0(t)x(t) = 0 \tag{1.11}$$

betrachten. Bemerkenswerterweise können wir eine solche Differentialgleichung k-ter Ordnung in n Dimensionen immer als eine Differentialgleichung *erster Ordnung* in entsprechend mehr Dimensionen interpretieren:

Proposition 1.6. *Seien k matrixwertige Koeffizientenfunktionen $A_0, \ldots, A_{k-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vorgegeben. Eine Funktion $x \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ löst genau dann (1.10), wenn die Funktion $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{nk})$ mit*

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \tag{1.13}$$

mit der Blockmatrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbb{1} \\ -A_0(t) & \cdots & \cdots & -A_{k-2}(t) & -A_{k-1}(t) \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

löst.

Beweis. Sei zunächst x eine Lösung von (1.11), dann gilt für y gemäß (1.12)

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(k)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ -A_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) - \cdots - A_0(t)x(t) \end{pmatrix} = A(t)y(t).$$

Also löst y die lineare Differentialgleichung (1.13). Offenbar ist y immer noch $\mathscr{C}^1$. Ist umgekehrt $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{nk})$ eine Lösung von (1.13), so gelten nach Komponenten ausgeschrieben für

$$y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_0, \ldots, x_{k-1} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= x_1(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{k-2}(t) &= x_{k-1}(t), \\ \dot{x}_{k-1}(t) &= -A_0(t)x_0(t) - \cdots - A_{k-1}(t)x_{k-1}(t). \end{aligned}$$

Setzt man nun rekursiv ein, erhält man $x_r(t) = x_0^{(r)}(t)$ für alle $1 \leq r \leq k-2$ und

$$x_0^{(k)}(t) = -A_0(t)x_0(t) - \cdots - A_{k-1}(t)x_0^{(k-1)}(t),$$

was wieder (1.10) für $x(t) = x_0(t)$ liefert. □

Bemerkung 1.7. Mit dem gleichen Trick kann man offenbar jede Differentialgleichung k-ter Ordnung in n Variablen in eine erster Ordnung mit dafür nk Variablen überführen. Die Betonung der Proposition liegt also vor allem darin, dass die *Linearität* der Differentialgleichung dabei erhalten bleibt. Sind wir also auch an (1.11) interessiert, so können wir zudem annehmen, dass wir die einfachere Form (1.13) vorliegen haben.

Korollar 1.8. *Die lineare Differentialgleichung* (1.11) *hat genau dann konstante Koeffizienten, wenn die äquivalente Differentialgleichung* (1.13) *konstante Koeffizienten hat.*

Beispiel 1.9 (Harmonischer Oszillator II). Seien $m, D, \varrho > 0$ vorgegeben. Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x}(t) + \frac{\varrho}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = 0 \tag{1.15}$$

des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist zur linearen Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = Ay(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & -\frac{\varrho}{m} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

für die zweikomponentige Funktion

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

äquivalent.

Bemerkung 1.10. Es wird vorteilhaft sein, auch komplexe Lösungen $x \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ von (1.11) beziehungsweise $y \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{nk})$ zuzulassen. Da $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ gilt, können wir jede $\mathbb{C}$-wertige Funktion als ein Paar von $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auffassen. Damit erhalten wir unmittelbar Begriffe für Stetigkeit und Differenzierbarkeit auch für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen. Umgekehrt können wir jede $\mathbb{R}$-wertige Funktion x als $\mathbb{C}$-wertige Funktion mit $x = \overline{x}$ auffassen, da so die reellen Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ innerhalb der komplexen Zahlen charakterisiert werden können.

Kontrollfragen. Was ist eine (lineare) Differentialgleichung? Weshalb bilden die Lösungen einer linearen Differentialgleichung einen Unterraum? In welchem Sinne genügt es, Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten?

1.2 Die Exponentialabbildung

Wir wollen nun den Fall mit konstanten Koeffizienten betrachten. Damit ist also $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ beziehungsweise $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine fest gewählte Matrix, und wir suchen die Lösungen von

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1.18}$$

wobei $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ beziehungsweise $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ gesucht ist. Zur Abkürzung betrachten wir den reellen und den komplexen Fall wieder simultan und setzen $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Zur ersten Orientierung betrachten wir den Fall $n = 1$, sodass also $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ und die Matrix $A = a \in \mathbb{K}$ einfach eine Zahl ist.

Lemma 1.11. *Sei $a \in \mathbb{K}$. Jede Lösung von*

$$\dot{x}(t) = ax(t) \tag{1.19}$$

ist von der Form

$$x(t) = c\mathrm{e}^{at}, \tag{1.20}$$

wobei die Konstante $c \in \mathbb{K}$ durch den Anfangswert

$$x(0) = c \tag{1.21}$$

festgelegt ist.